Corso di Politica Economica

Soluzione: esercitazione sulle funzioni di benessere sociale

David Bartolini

12 Aprile 2011

Esercizio 4

Considerate una società composta da $h = 1, 2, \cdots, H$ individui, e la seguente funzione di benessere sociale, che aggrega le utilità individuali rispetto al vettore di beni x

$$W = \frac{1}{1-\rho} \sum_h \left[U^h(x^h) \right]^{1-\rho}$$

(a) calcolate l'incremento di utilità per la societa derivante da un aumento infinitesimale dell'utilità di un individuo

(b) calcolate l'elasticità di sostituzione tra le utilità degli individui

(c) che interpretazione ha il parametro ρ di questa funzione?

(d) che funzione ottenete per $\rho = 0$?

(e) calcolate la pendenza delle curve di indifferenza sociali, nel caso $\rho = 0$. Ed interpretare il risultato.

Soluzione

(a) dobbiamo calcolare l'utilità sociale marginale, cioè dobbiamo fare la derivata parziale della funzione di benessere sociale W per ciascuna utilità degli individui.

$$\frac{\partial W}{\partial U^h} = \frac{1-\rho}{1-\rho}(U^h)^{-\rho} = \frac{1}{(U^h)^\rho} \qquad \forall\, h = 1, 2, \ldots, H$$

Abbiamo H derivate parziali, una per ogni individuo.

(b) l'elasticità di sostituzione tra le utilità degli individui ci dice quanto la società è disposta a "scambiare" le utilità tra i cittadini; in termini matematici questa disponibilità a scambiare è misurata dalla **curvatura** delle curve di indifferenza sociali.

> definizione di elasticità di sostituzione: la variazione percentuale del rapporto tra le utilità rispetto (cioè diviso) alla variazione percentuale della pendenza delle curve di indifferenza sociali

la **pendenza** delle curve di indifferenza sociali è data dal *saggio marginale di sostituzione*

$$SMS_{i,j} = \frac{dU^i}{dU^j} = -\frac{\frac{\partial W}{\partial U^j}}{\frac{\partial W}{\partial U^i}} = -\left(\frac{U^i}{U^j}\right)^{\rho} \qquad \forall i, j \in \mathcal{H}$$

questa formula che potete trovare in tutti i testi di Microeconomia, rappresenta il saggio marginale di sostituzione tra le utilità degli individui i e j.
Solitamente questo valore, come anche quello dell'elasticità, è considerato in valore assoluto,

$$|SMS_{ij}| = \left(\frac{U^i}{U^j}\right)^{\rho}$$

Ora abbiamo tutti gli elementi per calcolare l'elasticità di sostituzione, che chiamo σ:

$$\sigma = \frac{\text{variazione percentuale rapporto tra le utilità}}{\text{variazione percentuale della pendenza curve indiff}} = \frac{\frac{d(\frac{U^i}{U^j})}{(\frac{U^i}{U^j})}}{\frac{d|SMS|}{|SMS|}}$$

le variazioni percentuali posso essere scritte come funzioni logaritmiche, quindi prendendo il logaritmo naturale possiamo riscrivere l'elasticità di sostituzione come

$$\sigma = \frac{d\ln(\frac{U^i}{U^j})}{d\ln|SMS|}$$

per risolvere questa derivata consideriamo la definizione di SMS,

$$|SMS| = \left(\frac{U^i}{U^j}\right)^{\rho} \quad \Longrightarrow \quad \frac{U^i}{U^j} = |SMS|^{\frac{1}{\rho}} \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{U^i}{U^j}\right) = \frac{1}{\rho}\ln|SMS|$$

definendo $A = \ln\left(\frac{U^i}{U^j}\right)$ and $B = \ln|SMS|$, possiamo riscrivere l'ultima espressione del SMS come $A = \frac{1}{\rho}B$, per cui l'elasticità di sostituzione diventa

$$\sigma = \frac{dA}{dB} = \frac{1}{\rho}$$

Quindi, l'elasticità di sostituzione delle utilità è costante tra tutti gli individui. Le funzioni che hanno questa caratteristica si chiamo CES (constant elasticity of substitution) e sono molto utili perchè al variare del parametro ρ possiamo rappresentare diversi modi di aggregare le preferenze tra gli individui.

(c) il parametro ρ misura l'avversione della società alla ineguale distribuzione delle utilità (*inequality aversion*); maggiore è il valore di ρ, più bassa è l'elasticità di sostituzione.

(d) in caso di $\rho = 0$ abbiamo perfetta sostituzione tra le utilità, $SMS = 1$ e $\sigma = \infty$, per cui otteniamo la funzione di benessere sociale *Utilitarista*

Per vostra informazione:

- in case of $\rho = 1$ abbiamo la funzione di benessere sociale Bernoulli-Nash ($\sigma = 1$)
- in case of $\rho \to \infty$ abbiamo la funzione di benessere sociale Rawlsiana; infatti, $\lim_{\rho\to\infty} \sigma = 0$, cioè non c'è elasticità di sostituzione tra le utilità degli individui.

Esercizio 5

Considerate una società composta da due individui $h = \{1, 2\}$. Gli individui hanno la stessa funzione di utilità $U^h = \ln(Y^h)$ dove Y^h rappresenta il reddito disponibile (dopo le tasse) dell'individuo h. L'individuo 1 è disoccupato, mentre l'individuo 2 lavora. Il governo introduce una tassa proporzionale sul reddito, con aliquota t, e trasferisce il gettito al disoccupato. L'offerta di lavoro dell'individuo 2 è $l_2 = 1 - \alpha t$, dove $\alpha \in (0, 1)$ è una costante. Il salario percepito dall'individuo 2 è pari a 1Euro (per unità di lavoro).

- Calcolate il livello di tassazione ottimale quando il governo si basa su
  1. una funzione di benessere sociale utilitaristica (additiva);
  2. una funzione di benessere sociale Rawlsiana (maxmin)
- In quale caso si ottiene una allocazione delle risorse più egalitaria?

(by Ferdinand Mittermaier, traduzione mia)

Soluzione

- Il reddito lordo dell'individuo 2, per ogni unità di lavoro è $l_2 \cdot (1) = 1 - \alpha t$, dove l_2 è l'offerta di lavoro e (1) rappresenta il salario per unità di lavoro (per esempio potete pensare al salario orario, o al salario per ogni cliente servito, etc.)
- per cui il trasferimento all'individuo 1 è $t(1-\alpha t)$, cioè una parte t del reddito lordo dell'individuo 1
- il reddito disponibile dell'individuo 2 diventa $(1 - t)(1 - \alpha t)$
- per cui l'utilità dei due individui è

$$U^1 = \ln[t(1 - \alpha t)] \qquad U^2 = \ln[(1 - t)(1 - \alpha t)]$$

Ora possiamo calcolare il benessere sociale a seconda del metodo di aggregazione

1. **Utilitarista**: $W^u = \ln[t(1 - \alpha t)] + \ln[(1 - t)(1 - \alpha t)]$
   per trovare l'aliquota di tassazione t ottimale dobbiamo semplicemente trovare il massimo della funzione di benessere sociale utilitarista

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1 - 2\alpha t}{t(1 - \alpha t)} - \frac{1 + \alpha - 2\alpha t}{(1 - t)(1 - \alpha t)} = 0$$

imponendo $t \neq 1$ e $t \neq 0$, cioè escludendo le due soluzioni d'angolo, otteniamo

$$\begin{aligned}
(1-2\alpha t)(1-2t)-\alpha t &= 0 \\
4\alpha t^2-(2+3\alpha)t+1 &= 0 \\
t &= \frac{(2+3\alpha) \pm \sqrt{(2+3\alpha)^2-16\alpha}}{8\alpha}
\end{aligned}$$

otteniamo il valore ottimale di $t(\alpha)$ funzione di α. Se assumiamo che $\alpha = 1$ otteniamo la soluzione

$$t = \frac{1}{4}$$

Ora controlliamo che questo valore sia veramente il massimo di W^u, sostituendo $t = 1/4$, $t = 1$ e $t = 0$ nella funzione di benessere sociale

$$\begin{aligned}
W^u(t=1/4) &= \ln\left(\frac{3}{16}\right)+\ln\left(\frac{9}{16}\right) = -2.25 \\
W^u(t=0) &= \ln(0)+\ln(1) = -\infty+0 = -\infty \\
W^u(t=1) &= \ln(0)+\ln(0) = -\infty-\infty = -\infty
\end{aligned}$$

Per cui, la politica fiscale ottiamle in caso di benessere sociale utilitarista è $t^u = 0.25$

2. **Rawlsiana**: $W^r = \min\{\ln[t(1-\alpha t)]; \ln[(1-t)(1-\alpha t)\}$
per cui l'ottima imposta t si ottiene massimizzando l'utilità minore, cioè *maxmin*. In $t = 0$ l'utilità minore è $U^1 = 0$, per cui possiamo aumentare W^r, aumentando t fino a che U^1 rimane l'utitlità minore; cioè fino a quando $U^1 = U^2$,

$$\begin{aligned}
U^1 &= U^2 \\
t(1-\alpha t) &= (1-t)(1-\alpha t) \\
t &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Per cui la politica ottimale in caso di benessere sociale Rawlsiano è $t^r = 0.5$. In questo caso l'utilità dei due individui è la stessa

3. La distribuzione più egalitaria è raggiunta nel caso Rawlsiano, perchè

$$U^1(t=0.5) = U^2(t=0.5) = \ln\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)\right]$$

Per vostra conoscenza, notate che la soluzione utilitarista in caso di $\alpha = 0$ coincide con quella Rawlsiana, $t^u = t^r = 0.5$.